**Curso de Iniciación Científica para Jóvenes Talentos**

**Nivel Pre-Avanzado**

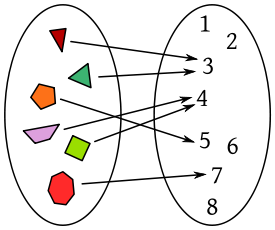
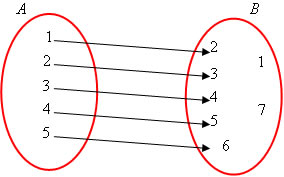
**Funciones**

**Definición**

Una función es una relación entre dos conjuntos y , denotada por , que satisface:

* Cada elemento está relacionado con algún elemento , y escribimos .
* Cada elemento está relacionado con exactamente un elemento de , es decir, si y , entonces .

Es práctico pensar en funciones como máquinas en las que entran valores del conjunto y salen valores del conjunto .

Un ejemplo de función sería una que asocie a polígonos con su cantidad de lados. En este caso, es el conjunto de polígonos convexos, es el conjunto de los naturales y la regla de asociación es la cantidad de lados del polígono. Otro ejemplo de función sería tal que . En este caso, , y así sucesivamente.

Cuando se define una función, hay que tener cuidado que cumpla las propiedades mencionadas anteriormente. Por ejemplo, tal que no está bien definida debido a que la raíz de los negativos no son reales. Sin embargo, si cambiamos la definición a tal que , la función sí queda bien definida.

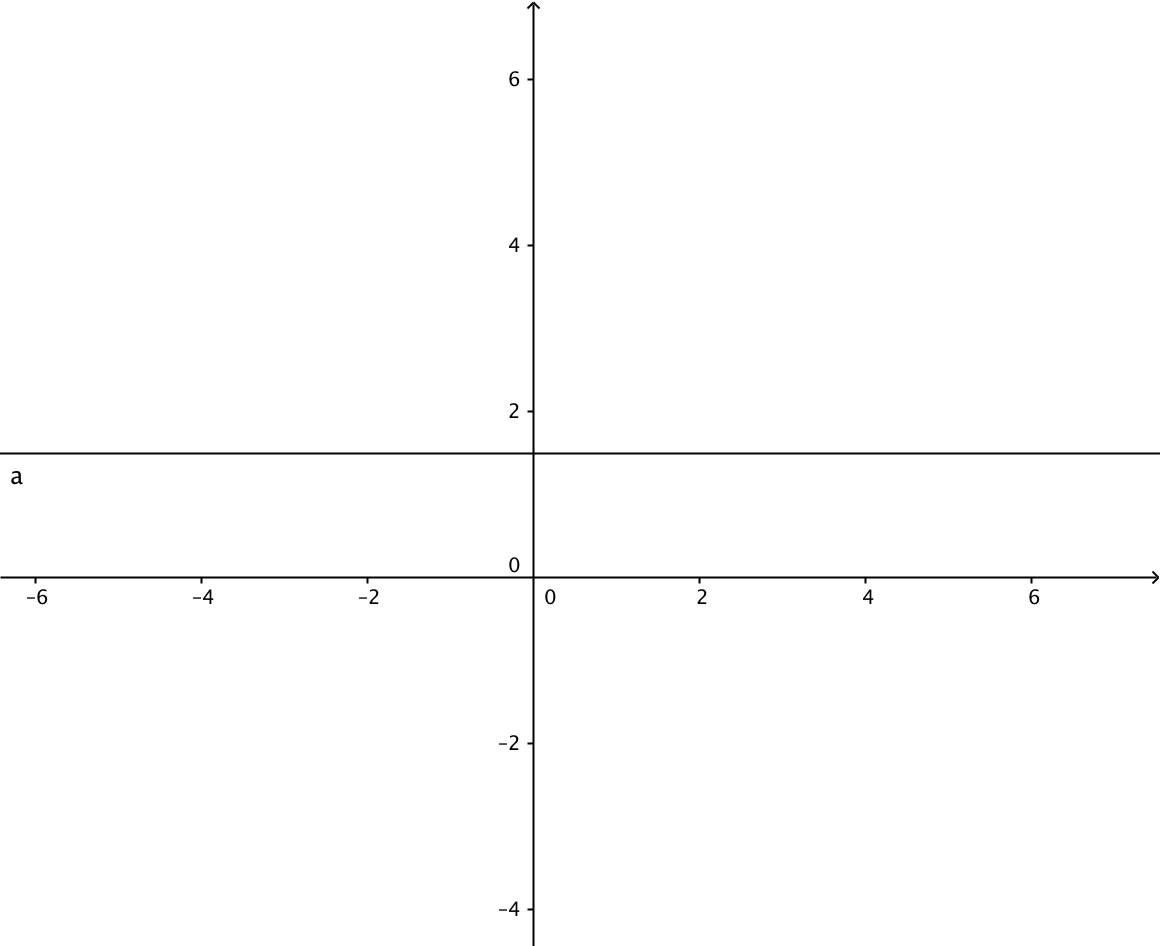
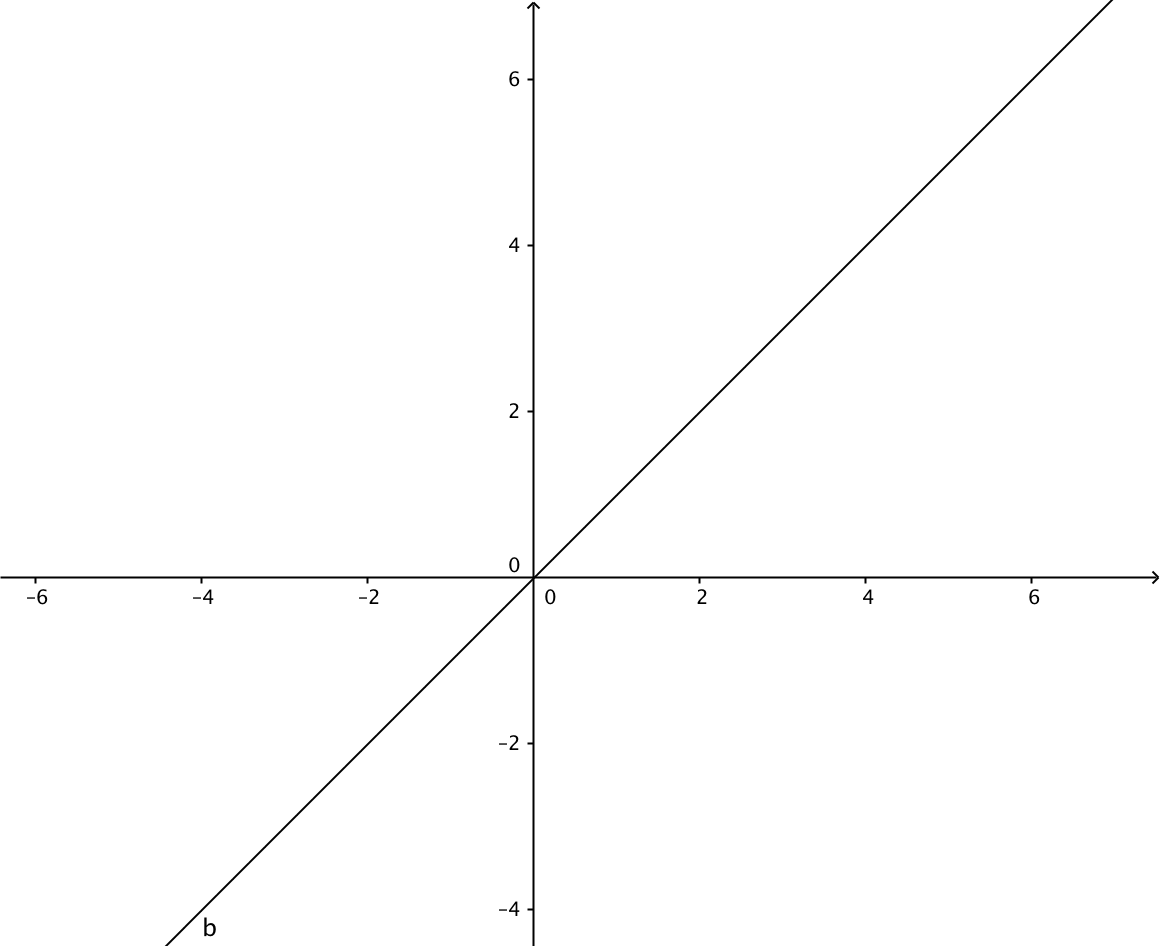
**Dominio, codominio y rango**

Si es una función, decimos que el conjunto es el dominio de la función, el conjunto es el codominio de la función y la relación es la regla de correspondencia. El rango o imagen de es el conjunto de todos los elementos en el codominio para los cuales existe un elemento tal que . Se denota al rango como .

El codominio y el rango no son necesariamente el mismo conjunto. El codominio es el conjunto de valores posibles de la función mientras que el rango es el conjunto de valores que toma la función. Por ejemplo, si consideramos la función tal que , el rango o imagen de la función sería el conjunto de los reales no negativos, ya que para todo real, mientras que el codominio es el conjunto de todos los reales.

**Gráfico de una función**

Si es una función, su gráfico corresponde al subconjunto del plano cartesiano que contiene a los puntos para todo .

Dos funciones sencillas pero importantes son la función constante y la función identidad. Si es tal que para toda con fijo, entonces es llamada función constante. En cambio, la función identidad tiene el mismo dominio y codominio, es decir, tal que para todo.

**Tipos de funciones**

Función monótona: Una función es monótona si conserva el orden de los elementos. Se pueden dar los siguientes casos:

* es no decreciente si para todo se tiene que . Si se da que para todo se tiene se dice que es estrictamente creciente.
* es no creciente si para todo se tiene que . Si se da que para todo se tiene se dice que es estrictamente decreciente.

Función continua: Una función es continua en un punto real si para todo existe tal que para todo . Es decir, mientras más se acerque a , más se acercará la imagen de a la imagen de . Se dice que una función es continua si lo es en todos sus puntos. Informalmente, decimos que una función es continua si el gráfico de la función puede hacerse sin levantar el lápiz. Ejemplo de funciones continuas son los polinomios.

Función acotada: Decimos que una función está acotada superiormente si existe fijo tal que para todo en el dominio de . Decimos que una función está acotada inferiormente si existe fijo tal que para todo en el dominio de . Si se dice que es acotada, se suele asumir que está acotada tanto superiormente como inferiormente.

Función periódica: Decimos que una función es periódica si existe un no nulo tal que . Al número le llamamos periodo de . Es claro que si es un entero no nulo, entonces también es periodo de .

Función par e impar: Decimos que una función es par si . Análogamente, decimos que una función es impar si .

Función inyectiva: Decimos que una función es inyectiva cuando a cada elemento del dominio le corresponde un elemento distinto del codominio. En otras palabras, para cualesquiera , se tiene que , o de forma equivalente, .

Función sobreyectiva: Decimos que una función es sobreyectiva cuando a cada elemento del codominio le corresponde una o más preimágenes en el dominio. Es decir, es sobreyectiva si para todo existe tal que . En este caso el rango de la función es equivalente al codominio de la función, es decir .

Función biyectiva: Decimos que una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Se dice que las funciones biyectivas tienen una correspondencia biunívoca ya que a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen en el codominio y viceversa. También se las conoce como funciones uno-a-uno.

Cabe aclarar que no todas las funciones inyectivas son sobreyectivas y viceversa (aunque esto es cierto cuando el dominio y el codominio tienen una cantidad finita e igual de elementos). Por ejemplo:

* tal que para todo entero positivo es inyectiva pero no sobreyectiva.
* tal que es sobreyectiva pero no inyectiva.
* La identidad es una función biyectiva.

**Operaciones entre funciones**

Suma, resta y multiplicación: Sean funciones definidas en los reales. Las operaciones , y (con ) se definen de la siguiente forma para real:

* .
* .
* .

Además, para un real: ).

Composición de funciones: Dadas las funciones y, se obtiene la composición de funciones como .

Función inversa: Si es inyectiva, entonces definimos tal que si y solo si .

Cabe aclarar que las operaciones mencionadas arriba mantienen la continuidad de la función en caso de que y sean continuas, pero esto no necesariamente ocurre con la monotonía.

**Ejercicios Propuestos**

1. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

* tal que .
* tal que .
* tal que .

1. Halle un conjunto para el cual las siguientes funciones sean biyectivas y otro para el que no:

* .
* .
* donde es una constante real positiva.

1. Probar que si , entonces .
2. Probar que la función es acotada.
3. Probar que la función tal que es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva.
4. Determinar el dominio y hallar la inversa de las siguientes funciones:

* .
* .
* .

1. Analizar si la función tal que es el número de factores primos distintos de está bien definida y si es inyectiva y/o sobreyectiva. Asumir
2. Demostrar que:

* Cualquier función puede ser escrita como compuesta de una función inyectiva con una función sobreyectiva .
* Cualquier función puede ser escrita como compuesta de una función sobreyectiva con una función inyectiva .

1. Dado pruebe que:

* para subconjuntos cualesquiera de
* Si es inyectiva, entonces para subconjuntos cualesquiera de .

Observación: El conjunto es igual a , es decir, el conjunto sin los elementos comunes de e .

**Ecuaciones funcionales**

Una ecuación funcional es una ecuación en la cual se quiere encontrar el valor de las funciones que lo forman.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que

para todos los reales .

Solución: Para resolver este tipo de ecuaciones hay que realizar sustituciones. Como la ecuación funcional original se cumple para todos los números reales, podemos elegir cualquiera de ellos y reemplazarlos en la ecuación, obteniendo así una expresión verdadera que nos brinda mayor información sobre la función. Por ejemplo, si reemplazamos e por (esto se simboliza , o bien, si ), obtenemos que .

Ahora que obtuvimos este resultado, conviene hacer el reemplazo o donde es un real cualquiera, para obtener .

Pero como , obtenemos que , y como es un real sobre el cual no impusimos ninguna condición particular, esta solución de la ecuación funcional es válida para todos los reales. Una vez obtenida una solución, siempre hay que verificar si satisface la ecuación original. En este caso, la verificación es trivial, ya que .

**Métodos para resolver ecuaciones funcionales**

Para resolver ecuaciones funcionales se necesita tener práctica, conocer ciertos métodos y reemplazos comunes para utilizarlos de acuerdo al problema que se tiene en frente. En esta sección veremos algunos de estos métodos.

1. Sustituir las variables por valores específicos

Uno de los primeros pasos que debemos seguir es ver si es posible determinar algunos valores de la función que se busca, como , , etc. En varios casos, los valores se pueden encontrar haciendo sustituciones directas, pero además puede que necesitemos hacer algún cambio de variables. En el ejemplo anterior, una vez hallado , como había una expresión de la forma , fue útil realizar el cambio de variable . De forma similar, si tenemos y queremos obtener y debemos hacer los reemplazos y , respectivamente.

1. Inducción matemática

Debemos tener siempre presente que el principio de la inducción matemática nos puede ayudar. En estos casos, es importante contar con la base de la inducción, por ejemplo, saber qué valor posee o , para después poder conjeturar una relación específica que nos permita pasar de a . Además, si se puede demostrar que la función es par o impar, podemos pasar de los enteros positivos a los negativos. También podemos buscar expresiones de la forma y después reescribirlas como donde . Estas situaciones generalmente se presentan en ecuaciones. Estos dos últimos ejemplos se podrán ver mejor en las ecuaciones de Cauchy, que estudiaremos en la siguiente sección.

Ejemplo: Sea tal que , si es un entero positivo mayor que 1. Si , hallar .

Solución: Sabemos que , así que en este caso vamos a hallar el valor general de . Vemos que . Por inducción, no es difícil de probar que . Por lo tanto tenemos que .

1. Utilizar propiedades básicas de las funciones

Es importante indagar si la función es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, periódica, par o impar. Esto nos ayuda a reducir casos y concentrarnos solamente en el conjunto de números donde la solución es válida.

3.1) Sobreyectiva: Cuando la función es sobreyectiva, a cada elemento del codominio le corresponde al menos una preimagen en el dominio, entonces podemos tomar tal que , donde es una constante que nos conviene.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que

para todos los reales .

Solución: Si hacemos el reemplazo , obtenemos que . Por lo tanto, como todo real puede ser escrito de la forma ya que es un real cualquiera y una constante, tenemos que puede tomar cualquier valor real, y por ende es sobreyectiva. Luego, tenemos que existe tal que . Por lo tanto, si , tenemos que .

Luego, como es sobreyectiva y es una constante, tenemos que todo real se puede escribir de la forma , obteniendo así para toda real. Por ende, las soluciones de la ecuación funcional son de la forma , donde es una constante cualquiera. Finalmente, esta solución verifica la ecuación original ya que .

3.2) Inyectiva: Cuando la función es inyectiva, conviene llevar a casos como donde primeramente y conseguir nueva información.

Ejemplo: La función satisface . Hallar todos los valores de que verifican .

Solución: Vemos que si , entonces , lo que implica que es inyectiva. Luego si , obtenemos que , y como es inyectiva,. Finalmente, cuando , tenemos que .

1. Puntos fijos y ceros

También podemos buscar los puntos fijos y ceros de la función, es decir, los tales que o , respectivamente. Luego, podemos sustituirlos en la ecuación original para obtener nueva información.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que para reales positivos cualesquiera y .

Solución: Primero, vemos que si , tenemos que . Por lo tanto, es un punto fijo para todo real positivo. Ahora, digamos que es un punto fijo. Si , obtenemos que . Por lo tanto, también es un punto fijo. Ahora vamos a probar por inducción que es punto fijo para todo entero positivo. Supongamos que es un punto fijo. Luego, si , , tenemos que , lo cual concluye nuestra inducción. Nuestro siguiente paso es demostrar que es un punto fijo para todo entero no nulo. Vemos que si , , obtenemos que . Por lo tanto, es un punto fijo y de forma análoga, con un entero positivo también es un punto fijo.

Ahora, para cerrar el problema, supongamos que . Vemos que existirá algún entero tal que sea muy grande, pero como es un punto fijo, también lo será, lo cual contradice a la condición del problema. Por lo tanto, debe cumplirse, lo que implica para todo . Finalmente, la solución verifica ya que .

1. Otras sustituciones

Además de las sustituciones por valores específicos, se puede intentar otras sustituciones más generales, como por ejemplo, , , , , etc.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que

para todo .

Solución: Efectuando el reemplazo , obtenemos que . Luego, podemos utilizar que en la ecuación original para obtener que . Finalmente, debemos verificar que esta solución verifica, lo cual es cierto ya que .

1. Simetría en las variables

Si la ecuación involucra dos o más variables, por ejemplo e , pero sin simetría entre ellas, entonces conviene realizar los reemplazos para obtener nueva información.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que para todos los reales positivos .

Realizando el reemplazo mencionado arriba, debido a la antisimetría obtenemos que Luego, tenemos que para cualesquiera reales positivos . Por lo tanto, si obtenemos que donde . Finalmente, solo debemos verificar la solución. Tenemos que , por lo tanto, y la única solución sería para todo real positivo .

1. Suponer que la solución es diferente

En otras palabras, asumir que la función es mayor o menor en un punto al valor de la función que se quiere probar que es la solución.

Ejemplo: Hallar todas las funciones tales que se cumplen las siguientes condiciones:

1. .
2. .
3. es estrictamente creciente.

Solución: Primero vamos a probar por inducción que para todo entero positivo . Supongamos que . Luego, si , , obtenemos que , lo cual concluye la inducción.

Ahora queremos probar que para todo entero positivo. Primero que nada, como , tenemos que . Luego, supongamos que para algún y digamos que . Como es estrictamente creciente y va de los enteros positivos a los enteros positivos, tenemos que para todos los enteros positivos . Esto implica que , lo cual es una contradicción. De manera análoga, se prueba que no existe alguno tal que , lo que nos deja con para todo entero positivo. Esta solución verifica trivialmente las tres condiciones del problema.

1. Comparar con las ecuaciones de Cauchy y otras conocidas

Si nuestra ecuación se puede reducir o simplificar a una ecuación de tipo Cauchy o a otra ecuación conocida, sería muy útil, ya que sabríamos sus soluciones. Cubriremos las ecuaciones de tipo Cauchy en la siguiente sección.

**Y finalmente… ¡no olvidar verificar las soluciones!**

Como vimos en ejemplos anteriores, es crucial comprobar que la función que proponemos realmente resuelve la ecuación. La solución de un problema de funciones no está completa si no se verifican las soluciones, y por lo tanto, no hacerlo puede costar puntos en exámenes de olimpiada.

**Ejercicios Propuestos**

1. Hallar todas las funciones tales que

para reales cualesquiera.

1. Hallar todas las funciones tales que

para reales cualesquiera.

1. Hallar todas las funciones tales que

para todos los reales .

1. Hallar todas las funciones tales que

para todos los reales .

1. Hallar todas las funciones sobreyectivas tales que

para reales cualesquiera.

1. Demostrar que no existe una función tal que para cualquier natural.
2. Halle todas las funciones tales que para todo natural.
3. Hallar todas las funciones tales que

para reales cualesquiera.

**Desigualdades**

Los números reales tienen la importante propiedad de poseer un orden. El orden en los números reales nos permitirá comparar dos números y determinar cuál de ellos es mayor, o bien, si son iguales.

Un ejemplo básico de desigualdad es , válida para todos los números reales. En este material se presentan desigualdades clásicas de gran utilidad para enfrentar y resolver problemas. También se incluyen ejemplos de problemas que se pueden resolver con cada desigualdad presentada.

**Desigualdad Triangular**

Para dos números y , siempre se tiene que

Además, la igualdad ocurre solamente cuando .

Observación: La fórmula general para números reales es

Demostración: Probaremos la desigualdad para y se puede demostrar el caso general por inducción simple.

Como ambos lados de la desigualdad son números positivos, bastará verificar que

Tenemos que , lo que concluye nuestra prueba.

Ejemplo: Para números reales muestre que

Solución: Si , o son iguales a , se da la igualdad. Suponemos entonces, como la desigualdad es simétrica en , y , que . Dividiendo entre , la desigualdad equivale a

Como y , se tiene que y . Entonces, es suficiente probar que

lo cual, por la Desigualdad Triangular, se cumple.

**Desigualdad Media Geométrica–Media Aritmética**

Si son reales positivos, entonces

Demostración: Sean y . Llamaremos a la afirmación para números. La demostración se hará por una inducción sobre del siguiente tipo:

1. Se muestra que es cierta.
2. Se muestra que implica .
3. Se muestra que implica .

Cuando (i), (ii) y (iii) son válidos, todas las afirmaciones con son válidas.

Para probar (i), basta observar que

(ii) Sean números no negativos y sea . Como es verdadera, tenemos que

Luego, . Esto implica que , por lo que es verdadera.

(iii) Sean números no negativos, entonces, como es verdadera,

Y como es verdadera,

Combinando ambas partes obtenemos que se cumple. Esto concluye nuestra prueba.

Ejemplo: Para , probar que .

Solución: Aplicando la Desigualdad MG-MA a se obtiene .

De aplicar la misma desigualdad a se obtiene .

Multiplicando ambas desigualdades, podemos concluir que .

**Ejercicios Propuestos**

1. Sean números reales con . Muestre que
2. Sean con . Muestre que
3. Para , probar que
4. Para , probar que
5. Probar que si , entonces
6. Sean tales que . Muestre que
7. Sean números positivos con . Muestre que
8. (Bernoulli) Para todo número real y todo entero positivo , se cumple .

**Desigualdad del Reacomodo**

Considere dos colecciones de números reales ordenados en forma creciente: y . Para cualquier permutación de , se tiene que

La primera igualdad es cierta si y solo si o y la segunda igualdad se da si y solo si o . A la primera desigualdad se le llama desigualdad del reacomodo.

Demostración: Supongamos que . Sean y .

La diferencia entre y es que los coeficientes de y , donde , están intercambiados, por lo que .

Entonces tenemos que, si y solo si . Repitiendo este proceso, tenemos que la suma es la mayor cuando . Además, de forma similar se puede probar que si las son todas distintas, la igualdad se da si y solo si .

Corolario: Para cualquier permutación de se tiene que

dándose la igualdad si y solo si .

Ejemplo 1: Considere dos colecciones de números , y una permutación de . Muestre que

Solución: Desarrollando la desigualdad anterior, tenemos que es equivalente a

pero como , entonces la desigualdad que tenemos que probar es equivalente a demostrar

lo cual es cierto por la desigualdad del reacomodo.

Ejemplo 2 (Nesbitt): Para reales positivos, se tiene que

Solución: Supongamos sin pérdida de generalidad que . Luego, y .

Usando la desigualdad del reacomodo dos veces, tenemos que

Sumando ambas desigualdades obtenemos lo que queríamos probar:

**Ejercicios Propuestos**

1. Para , probar que
2. Para , probar que
3. Si y , entonces
4. (Media Geométrica–Media Armónica) Sean . Muestre que

donde la igualdad se da si y solo si .

1. Si son tales que , probar que .
2. (Chebyshev) Dados números reales y , se tiene que
3. Sean reales positivos tales que . Pruebe que
4. Sean . Pruebe que

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

Para , números reales cualesquiera, se tiene que

La igualdad se da si y solo si existe tal que se cumple para .

Demostración: Es claro que si la desigualdad se cumple para los reales no negativos, se cumple para todos los reales, ya que se maximiza cuando todos los números toman su valor no negativo. Por lo tanto, probaremos el resultado para los reales no negativos.

Si , o bien, el resultado es claro. De lo contrario, sean y . Claramente, y . Definamos y para . Luego, por la desigualdad del reacomodo,

Por lo tanto obtenemos que

que es lo que queríamos probar.

La igualdad se da, según la desigualdad del reacomodo, si y solo si , es decir, para , o bien, . Esta última expresión es equivalente a decir que existe tal que cuando .

Ejemplo 1: Vamos a probar la desigualdad de Nesbitt usando Cauchy-Schwarz.

Solución: Tenemos que

Pero, por la desigualdad del reacomodo,, lo cual implica que

que es lo que queríamos probar.

Ejemplo 2: Si , pruebe que

Solución: Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los conjuntos y , obtenemos la siguiente desigualdad, equivalente a la inicial:

**Ejercicios Propuestos**

1. Para , pruebe que
2. (Cauchy-Schwarz en la forma de Engel) Si y , entonces

donde la igualdad se da si y solo si existe con para .

1. Sean reales positivos con . Muestre que
2. Sean reales positivos tales que . Pruebe que
3. (Media Cuadrática-Media Aritmética) Sean . Entonces
4. Para tales que , pruebe que .
5. Sean reales mayores a 1 tales que . Pruebe que
6. Sean reales positivos tales que . Muestre que